

AMMORTAMENTO FRANCESE o PROGRESSIVO o A RATA COSTANTE

Si segue la condizione di chiusura iniziale:

$$S = \sum_{k=1}^n R_k (1+i)^{-k}$$

imponendo l'uguaglianza delle rate:

$$R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$$

con pagamenti posticipati si ha:

$$S = R a_{\overline{n}|i}$$

da cui si ricava la rata:

$$R = S / a_{\overline{n}|i}$$

Il debito residuo è:

$$D_k = R a_{\overline{n-k}|i}$$

Le quote interesse sono:

$$I_k = D_{k-1} i = R a_{\overline{n-k+1}|i} i = R(1-v^{n-k+1})$$

dove è il fattore di attualizzazione composto: $v = 1/(1+i)$.

Le quote di capitale, nell'ammortamento francese, aumentano in progressione geometrica di ragione $(1+i)$. Per dimostrarlo si considerano due rate consecutive disaggregate in quote di capitale e quota d'interesse:

$$C_k + I_k = C_{k+1} + I_{k+1}$$

sostituendo al nota relazione tra quota d'interesse e debito residuo:

$$I_k = D_{k-1} i$$

si ottiene:

$$C_k + D_{k-1} i = C_{k+1} + D_k i$$

si ricordi che la differenza tra due debiti residui consecutivi è uguale alla quota di capitale corrente, cioè:

$$D_{k-1} - D_k = C_k$$

risolvendo si ha:

$$C_{k+1} = C_k (1 + i) = R (v^{n-k+1})$$

Per questa proprietà delle quote capitali questo ammortamento viene detto anche progressivo. Vale anche la seguente relazione:

$$C_k = R (v^{n-k+1})$$

Esempi

1) Si compili il piano d'ammortamento francese relativo ad un mutuo concesso di 1.000 € da estinguere con $n=5$ rate annue posticipate al tasso annuo $i=7\%$.

Inizialmente, si calcola la rata:

$$R = S / a_{\overline{5}|0.07} = 243,89 \text{ €}$$

Indi, moltiplicando il tasso per il debito contratto si trova la prima quota interesse:

$$I_1 = D_0 i = 70 \text{ €}$$

La prima quota di capitale si può provare per semplice sottrazione:

$$C_1 = R - I_1 = 173,89 \text{ €}$$

per trovare il debito residuo corrente:

$$D_1 = D_0 - C_1 = 826,11 \text{ €}$$

Si sono determinati tutti gli elementi al tempo 1 procedendo per ricorsività si stende l'intero piano. Il piano si poteva stendere anche sfruttando il che le quote capitali sono in progressione geometrica per cui trovando il primo valore della colonna si procede sfruttando la proprietà. Inoltre, da questa colonna si ricava la colonna del debito residuo indi quella delle quote d'interesse.

k	R	C_k	I_k	D_k
0	-	-	-	1.000
1	243,89	173,89	70	826,11
2	243,89	186,06	57,83	640,05
3	243,89	199,09	44,80	440,96
4	243,89	213,02	30,87	241,90
5	243,89	227,94	15,95	-

Verifichiamo la correttezza del piano mediante le chiusure. La condizione di chiusura elementare è:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = 173,89 + 186,06 + 199,09 + 213,02 + 227,94 = 1.000 \text{ €}$$

Per la verifica della condizione di chiusura iniziale occorre calcolare la somma dei valori attuali delle rate che sono tutte uguali se ha:

$$S = R a_{5 \ 0,07} = 1.000 \text{ €}$$

2) Si è contratto un debito, S, convenendo di rimborsare 10 rate costanti annue posticipate al tasso trimestrale dell'1,94%. Sapendo che il debito residuo al quarto anno è di 7.250€ si determini la rata di ammortamento, l'importo del debito inizialmente contratto, la quota di capitale e la quota d'interesse componenti la quarta rata. Si supponga che, un minuto dopo il versamento della quarta rata, il tasso di interesse annuo effettivo aumenti di 0.025% ed inoltre, il debitore non versi la quinta e la sesta rata calcolare il valore della nuova rata mantenendo invariata la durata del rimborso del prestito.

Le rate sono costanti e quindi si è nell'ammortamento francese posticipato. Le rate sono annue e il tasso fornito dal testo è trimestrale quindi si ricerca il tasso annuo equivalente:

$$i = (1 + i_4)^4 - 1 = (1 + 0,0194)^{12} - 1 = 0,07989 \cong 0,08$$

dalla relazione del debito residuo nell'ammortamento a rata costante:

$$D_4 = R a_{10-6 \ 0,08}$$

si ricava agevolmente la risposta alla prima domanda:

$$R = 1568,29 \text{ €}$$

la somma mutuata $S = D_0$ è:

$$D_0 = R a_{10 \ 0,08} = 10.523,35 \text{ €}$$

la quota di capitale della quarta rata è:

$$C_4 = R v^{(n-k+1)} = 1568,29 (1,08)^{-7} = 915,08\text{€}$$

la quota interesse della quarta rata si trova per differenza:è

$$I_4 = R - C_4 = 1568,29 - 915,08 = 653,21\text{€}$$

dopo la quarta rata il nuovo tasso è:

$$i' = 0,08 + 0,00025 = 0,08025$$

la sospensione della quinta e sesta rata determina che il debito residuo al quarto anno di 7.250€ deve essere capitalizzato per due anni al nuovo tasso:

$$D_6 = D_4 (1,08025)^2 = 8.460,32\text{€}$$

da cui, agevolmente, si ricava il valore delle quattro rate che rimangono da pagare:

$$R' = D_6 / a_{4 \ 0,08025} = 2.555,81\text{€}$$

Si contrae un prestito di 100.000€ che si ammortizza con il pagamento di 10 rate annue posticipate al tasso del 7%. Determinare la composizione della quinta rata e il relativo debito residuo.

La rata costante:

$$R = S / a_{10 \ 0,07} = 14.237,75\text{€}$$

La composizione della quinta rata è:

$$C_5 = R v^{(10-5+1)} = 14.237,75 (1,07)^{-6} = 9487,21\text{€}$$

$$I_5 = R - C_5 = 4750,54\text{€}$$

per il debito residuo si ha:

$$D_5 = R a_{10-5 \ 0,07} = 58.377,59\text{€}$$